ReGeo ISSN: 2177-3246

A CONVERGÊNCIA DA BELEZA: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA E FRACTAL DA CADEIA DE CÍRCULOS DE SANGAKU

THE CONVERGENCE OF BEAUTY: AN ANALYTICAL AND FRACTAL APPROACH TO THE SANGAKU CHAIN OF CIRCLES

LA CONVERGENCIA DE LA BELLEZA: UN ENFOQUE ANALÍTICO Y FRACTAL DE LA CADENA DE CÍRCULOS DE SANGAKU

10.56238/revgeov17n3-197

Fábio Henrique Marinho Cabral
Mestre em Matemática
Instituição: Instituto Federal do Pará (IFPA)
E-mail: fabio.cabral@ifpa.edu.br

RESUMO
Considerando o problema estético e técnico da "Cadeia de Círculos em Ângulo Agudo", recorrente na tradição dos Sangakus japoneses, e a necessidade de recursos didáticos que conectem a geometria sintética ao rigor das séries infinitas para superar a fragmentação curricular, objetiva-se demonstrar analiticamente a convergência da área total ocupada por essa sucessão infinita de círculos tangentes, reduzindo a complexidade visual do problema a uma solução trigonométrica elegante. Para tanto, procede-se a uma pesquisa teórica de natureza exploratória, fundamentada no método dedutivo e na modelagem geométrica. Desse modo, observa-se que, através da identificação de propriedades de semelhança e da aplicação do somatório de séries, a área total resulta em uma função finita dependente estritamente do raio inicial e do ângulo de abertura. O que permite concluir que a beleza da solução reside na economia do argumento matemático, reafirmando a eficácia da geometria sintética na simplificação de fenômenos iterativos e oferecendo uma base sólida para práticas pedagógicas que visam a integração de limites e geometria plana.

Palavras-chave: Geometria Sintética. Séries Geométricas. Elegância Matemática. Educação Matemática. Convergência.

ABSTRACT
Considering the aesthetic and technical problem of the "Chain of Circles in an Acute Angle," recurring in the Japanese Sangaku tradition, and the need for didactic resources that connect synthetic geometry to the rigor of infinite series to overcome curricular fragmentation, it aims to analytically demonstrate the convergence of the total area occupied by this infinite succession of tangent circles, reducing the visual complexity of the problem to an elegant trigonometric solution. To this end, we proceed to an exploratory theoretical research, grounded in the deductive method and geometric modeling. In this way, it is observed that, through the identification of similarity properties and the application of geometric series summation, the total area results in a finite function strictly dependent on the initial radius and the opening angle. Which allows us to conclude that the beauty of the solution lies in the economy of the mathematical argument, reaffirming the effectiveness of synthetic geometry in

simplifying iterative phenomena and providing a solid foundation for pedagogical practices aimed at integrating limits and plane geometry.

Keywords: Synthetic Geometry. Geometric Series. Mathematical Elegance. Mathematics Education. Convergence.

RESUMEN
Considerando el problema estético y técnico de la "Cadena de Círculos en Ángulo Agudo", recurrente en la tradición de los Sangakus japoneses, y la necesidad de recursos didácticos que conecten la geometría sintética con el rigor de las series infinitas para superar la fragmentación curricular, tiene como finalidad demostrar analíticamente la convergencia del área total ocupada por esta sucesión infinita de círculos tangentes, reduciendo la complejidad visual del problema a una solución trigonométrica elegante. Para ello se procede a una investigación teórica de naturaleza exploratoria, fundamentada en el método deductivo y en el modelado geométrico. De esta manera se observa que, a través de la identificación de propiedades de semejanza y la aplicación de la suma de series geométricas, el área total resulta en una función finita que depende estrictamente del radio inicial y del ángulo de apertura. Lo que permite concluir que la belleza de la solución reside en la economía del argumento matemático, reafirmando la eficacia de la geometría sintética en la simplificación de fenómenos iterativos y ofreciendo una base sólida para prácticas pedagógicas que busquen la integración de límites y geometría plana.

Palabras clave: Geometría Sintética. Series Geométricas. Elegancia Matemática. Educación Matemática. Convergencia.

1 INTRODUÇÃO

A matemática é frequentemente descrita por G. H. Hardy (1940) como uma arte criativa, onde a beleza reside na inevitabilidade e na economia dos argumentos. Para o autor, os padrões matemáticos, assim como os de um pintor ou poeta, devem possuir uma harmonia intrínseca onde não haja lugar para o supérfluo. No contexto de competições olímpicas e do ensino superior, problemas que envolvem processos iterativos infinitos como fractais e pavimentações costumam encantar justamente por essa dicotomia entre a aparente complexidade da figura e a simplicidade elegante da resposta final.

Historicamente, a geometria clássica encontrou nos Sangakus japoneses (tabuletas votivas de madeira com desafios geométricos) um terreno fértil para a exploração de propriedades de tangência e inscrição. Entre esses problemas, a configuração de círculos sucessivamente inscritos em um ângulo agudo destaca-se como um exemplo clássico de "infinito aprisionado" em uma região finita e delimitada. Embora a visualização de uma sequência infinita de círculos tangentes possa sugerir uma complexidade inalcançável, a aplicação de ferramentas de geometria sintética e análise de séries revela uma estrutura de recorrência surpreendentemente regular.

A fascinação por sequências infinitas inseridas em contextos geométricos finitos não é uma preocupação moderna, encontrando raízes na antiguidade grega com o método da exaustão de Arquimedes, conforme nos diz Sá (2011). Contudo, a estética específica da "Cadeia de Círculos" remete ao rigor visual dos matemáticos japoneses do período Edo, que viam na geometria uma forma de devoção intelectual. Como aponta Fukagawa e Rothman (2008), os problemas de Sangaku frequentemente desafiavam o observador a encontrar relações de tangência complexas que, sob uma análise cuidadosa, revelavam propriedades de proporção áurea ou progressões harmônicas. Essa tradição ressalta que a resolução de problemas é, primordialmente, um exercício de percepção de padrões que transcendem a mera aplicação de fórmulas.

Adicionalmente, a natureza iterativa desse problema permite uma conexão direta com o conceito de autossimilaridade, característica fundamental dos objetos fractais. No cenário contemporâneo, a utilização de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, possibilita que propriedades antes restritas ao campo abstrato sejam exploradas empiricamente, permitindo que a invariância da razão entre os raios seja verificada em tempo real. Essa abordagem moderna não invalida o rigor sintético, mas o complementa, oferecendo uma nova camada de interpretação visual que reforça a percepção da ordem matemática em estruturas que crescem ou diminuem indefinidamente.

Além do aspecto histórico e tecnológico, a análise da área total ocupada por essa sucessão de círculos oferece uma oportunidade pedagógica ímpar para discutir a transversalidade entre a Geometria Plana e o Cálculo Diferencial e Integral. No ensino superior, a transição do discreto para o contínuo é um dos obstáculos conceituais mais significativos para os estudantes. Segundo Simmons (2016), a visualização de séries infinitas através de modelos geométricos tangíveis auxilia na compreensão da convergência, transformando o conceito abstrato de limite em uma realidade espacial visível. Ao observar que a soma das áreas de infinitos círculos não resulta em um valor infinito, mas sim em uma fração exata da área total do setor angular, o estudante consolida a noção de soma de uma série geométrica de forma intuitiva.

Neste contexto, surge a questão central desta pesquisa: De que maneira a transição entre a percepção visual geométrica e a modelagem algébrica de séries infinitas pode simplificar a determinação da área total ocupada por uma cadeia de círculos tangentes em um ângulo agudo? A justificativa para este estudo reside na necessidade de materiais didáticos que façam a ponte entre a Geometria Plana do Ensino Médio avançado e o rigor formal da Análise Real. Ao explorar o que denominamos de "Trombeta de Círculos", o trabalho oferece aos estudantes de graduação e entusiastas de olimpíadas uma visão integrada da matemática, onde a álgebra não é apenas uma ferramenta de cálculo, mas o meio pelo qual se revela a harmonia intrínseca de uma forma geométrica.

Por fim, a relevância deste estudo ancora-se no conceito de "prova elegante", definido por Aigner e Ziegler (2018) como aquela que atinge o resultado com o mínimo de esforço estrutural e o máximo de clareza lógica. No caso da "Trombeta de Círculos", a solução que utiliza a semelhança de triângulos para deduzir a razão da progressão evita o uso desnecessário de coordenadas cartesianas complexas, privilegiando a geometria sintética. Essa economia de pensamento não apenas facilita a resolução, mas educa o olhar do pesquisador para buscar a simplicidade em problemas aparentemente fractais, reforçando que a eficiência analítica é um dos pilares da excelência na matemática olímpica e acadêmica.

O objetivo geral deste trabalho é investigar as propriedades de convergência analítica e a estética da "Cadeia de Círculos em Ângulo Agudo", estabelecendo um modelo matemático que integre a geometria clássica japonesa e a análise de séries infinitas. Para alcançá-lo, delineiam-se os seguintes objetivos específicos:

a) Demonstrar analiticamente a razão de semelhança entre raios de círculos consecutivos inscritos em um ângulo agudo 2θ, estabelecendo a lei de formação da sequência;
b) Modelar a soma das áreas da cadeia infinita como uma série geométrica convergente, provando que a área total é uma função dependente exclusivamente do raio inicial r_1 e do ângulo θ;
c) Avaliar a "economia do argumento" matemático ao comparar a complexidade visual da figura com a simplicidade da solução trigonométrica final, discutindo seu potencial como recurso para o ensino de limites e progressões.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A geometria clássica japonesa, manifestada nos Sangaku*s*, oferece um vasto repertório de problemas envolvendo círculos e polígonos tangentes inscritos em formas complexas. Diferente da tradição euclidiana ocidental, que priorizava a dedução lógica axiomática, a matemática do período Edo enfatizava a harmonia visual e o desafio intelectual. Fukagawa e Rothman (2008) destacam que esses problemas não eram meros exercícios, mas formas de devoção que revelavam propriedades profundas de proporção e simetria. No caso da cadeia de círculos em um ângulo agudo, a beleza reside na repetição infinita de uma mesma forma que diminui em escala, mas mantém a mesma relação de tangência com as retas que definem o ângulo.

Sob a ótica da Educação Matemática contemporânea, a utilização desses problemas históricos alinha-se à Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAMRP). Onuchic e Allevato (2011) defendem que o problema deve ser o ponto de partida para a construção de novos conceitos, e não apenas uma aplicação de fórmulas. Ao enfrentar a "Trombeta de Círculos", o aluno é desafiado a investigar propriedades antes de formalizar o conteúdo de séries, o que, segundo as autoras, gera um aprendizado com maior significado e profundidade.

A análise da área total ocupada por uma sequência infinita de objetos requer a transição do pensamento geométrico discreto para o rigor da análise real. Segundo Simmons (2016), o uso de modelos geométricos tangíveis é fundamental para que o estudante compreenda que uma soma de infinitas parcelas pode resultar em um valor finito e exato. A convergência de uma série geométrica é garantida quando a razão q entre termos consecutivos obedece ao intervalo $-1 < q < 1$. No problema proposto, a razão é derivada das propriedades trigonométricas do ângulo de abertura, permitindo que a complexidade fractal da figura seja reduzida a uma fórmula algébrica elegante.

Neste contexto, a investigação matemática proposta assume um caráter exploratório. Ponte (2014) argumenta que o trabalho de investigação em sala de aula permite ao aluno agir como um matemático, formulando conjecturas e testando validades. Para o autor, essa prática é essencial no ensino superior e na formação de professores, pois desloca o foco do "saber fazer" para o "compreender o porquê", permitindo que a elegância da solução seja percebida como parte do rigor investigativo.

O conceito de "prova elegante" é central para a avaliação da qualidade de um argumento matemático. Para Aigner e Ziegler (2018), uma demonstração é considerada elegante quando atinge o resultado com clareza lógica e mínimo esforço estrutural. Essa perspectiva está alinhada à visão de Hardy (1940), para quem a matemática deve possuir uma harmonia intrínseca onde não haja espaço para o supérfluo. Santos e Heidemann (2017) reforçam que a estética na matemática não é um adorno, mas um componente da própria cognição; a simplicidade de uma solução trigonométrica para um problema visualmente denso reduz a carga cognitiva e amplia a compreensão conceitual.

A análise de problemas que integram diferentes áreas da matemática, como a geometria plana e o cálculo infinitesimal, é uma estratégia fundamental para o desenvolvimento do pensamento crítico. Segundo Simmons (2016), a fragmentação do conhecimento impede que o estudante perceba a matemática como um corpo único e coeso. Bairral (2019) observa que a integração de conceitos, mediada por representações visuais, é o que permite a transição do raciocínio empírico para o formal. Ao introduzir a "Cadeia de Círculos", o docente permite que conceitos de trigonometria básica se tornem a chave para a compreensão de limites de sequências.

Problemas de tangência infinita funcionam como modelos simplificados de estruturas fractais, onde a autossimilaridade é a característica dominante. Como aponta Pires (2010), a clareza na exposição da metodologia é o que garante a confiabilidade de um estudo. No contexto deste artigo, a modelagem estende-se à compreensão de como uma regra de formação geométrica local determina o comportamento global de uma série infinita. Embora a intuição visual seja o ponto de partida, o rigor formal é indispensável. Aigner e Ziegler (2018) defendem que a elegância de uma demonstração reside na sua capacidade de ser compreendida sem o auxílio de artifícios algébricos excessivamente densos. No caso da "Trombeta de Círculos", a preferência pela geometria sintética reforça a economia de pensamento e a clareza lógica.

A transição do conceito discreto de soma de áreas para o conceito contínuo de limite é um dos pontos mais desafiadores do Ensino Superior. Simmons (2016) argumenta que a visualização espacial de séries auxilia na consolidação dessa noção. Ao demonstrar que a área total ocupada pelos círculos é uma fração exata e finita da área do setor angular, o trabalho oferece uma prova empírica da convergência. Retomando a filosofia de Hardy (1940), a investigação matemática deve ser encarada como uma atividade criativa similar à arte, onde a "beleza" é o critério final de verdade. Compreender essa harmonia é o que diferencia o ato de calcular do ato de fazer matemática, elevando a resolução de um problema ao status de produção de conhecimento científico.

A utilização de recursos visuais e representações semióticas no ensino de geometria é defendida por autores como Arcavi (2003), que define a visualização como a capacidade de interpretar e articular imagens e diagramas para facilitar a compreensão de conceitos abstratos. No caso da cadeia de círculos, a transição da percepção visual da tangência para a representação algébrica da razão q não é apenas um passo técnico, mas um processo de "ver" a invariância geométrica por trás da mudança de escala. Essa habilidade de visualização matemática é essencial para que o aluno consiga antecipar a convergência da série antes mesmo de realizar os cálculos formais, fortalecendo a intuição geométrica.

Além disso, a inserção da dimensão histórica, através dos Sangaku*s*, atua como um elemento humanizador da matemática. Segundo Miguel e Miorim (2011), a história da matemática não deve ser vista como uma curiosidade isolada, mas como um "laboratório" de problemas que revela diferentes formas de racionalidade. Ao confrontar o estudante com problemas do Japão feudal, retira-se a matemática do campo do pragmatismo imediato e a coloca no campo da cultura e da estética. Esse deslocamento favorece o engajamento cognitivo, pois o problema deixa de ser um exercício de livro didático para se tornar um enigma histórico a ser decifrado sob a ótica da modernidade.

Por fim, a problemática da soma das áreas da "Trombeta de Círculos" toca em um dos paradoxos mais férteis da disciplina: a coexistência entre o discreto (círculos individuais) e o contínuo (a área total do setor). Healy (2015) ressalta que o desafio de converter processos iterativos em leis gerais é a base do pensamento algébrico avançado. Ao demonstrar que uma soma de infinitos termos podem ser encapsulada em uma função trigonométrica finita, o artigo fornece um contraexemplo intuitivo à falácia de que o infinito é sempre "inalcançável". Essa discussão é vital para desmitificar o conceito de limite e preparar o terreno para o Cálculo Diferencial, onde o entendimento de somas infinitesimais é o pilar estruturante.

3 METODOLOGIA

A metodologia aplicada neste trabalho delineia os procedimentos empregados para conduzir a investigação matemática, assegurando a transparência necessária para a replicabilidade e confiabilidade dos resultados. O estudo caracteriza-se como uma pesquisa teórica e exploratória, fundamentada no método dedutivo, com o objetivo de converter uma configuração geométrica em um modelo analítico de convergência.

A pesquisa adota uma abordagem qualitativa e analítica, focada na resolução de problemas e na modelagem matemática. Segundo Pires (2010), a coerência relacional deve iniciar-se pela justificativa do problema para, então, detalhar os métodos utilizados. Dessa forma, o estudo parte da configuração geométrica de uma cadeia infinita de círculos para construir uma prova baseada em propriedades de semelhança e séries.

Os procedimentos de análise de dados foram divididos em três etapas principais:

a) Análise Geométrica Sintética: identificação das propriedades de tangência e construção de triângulos retângulos auxiliares para relacionar os raios consecutivos (r_n e r_{n+1}) ao ângulo de abertura 2θ;
b) Modelagem Algébrica: aplicação do rigor da geometria euclidiana para o estabelecimento de uma lei de formação recorrente, definindo a razão q da progressão geométrica;
c) Síntese Analítica: utilização do somatório de séries infinitas para a determinação da área total, avaliando-se a convergência do modelo frente à área do setor angular.

A análise dos resultados fundamenta-se no critério de "economia do argumento" matemático, conforme definido por Aigner e Ziegler (2018). As limitações do estudo restringem-se a casos de ângulos agudos ($2\theta < 90°$), garantindo que a sequência de círculos tangentes internos seja perfeitamente definida e que a série resultante seja convergente.

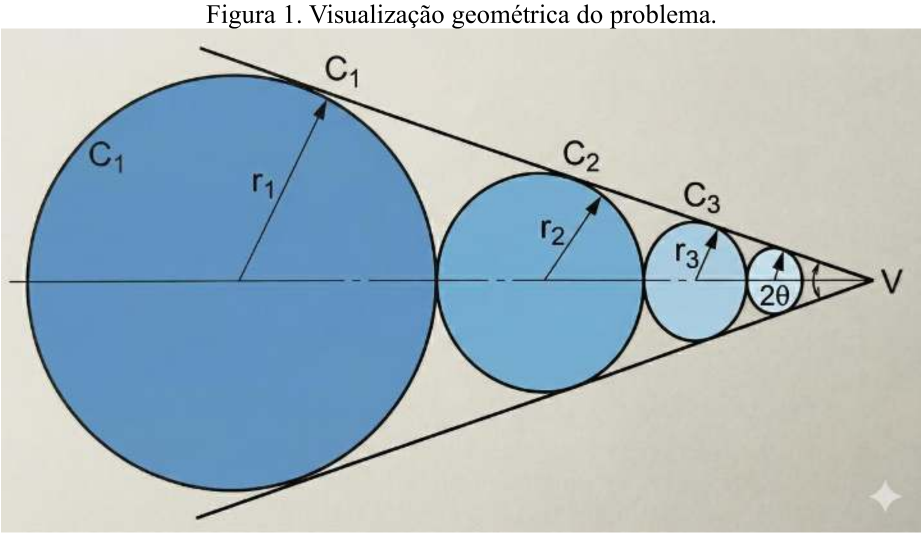
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos revelam que a complexidade visual da "Trombeta de Círculos" pode ser reduzida a uma progressão geométrica cuja razão depende estritamente da abertura do ângulo. A seguir, apresenta-se a dedução analítica e a discussão de suas implicações.

4.1 DEDUÇÃO DA RAZÃO DE SEMELHANÇA

Considere um ângulo agudo de abertura 2θ, com vértice na origem V. Seja C_1 o primeiro círculo de raio r_1 e centro O_1, e C_2 o segundo círculo de raio r_2 e centro O_2, ambos tangentes às semirretas que formam o ângulo e tangentes entre si. O processo repete-se infinitamente, gerando uma sequência $\{C_n\}$ de círculos tangentes aos lados e ao círculo anterior, diminuindo em direção ao vértice do ângulo conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1. Visualização geométrica do problema.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

4.1.1 Abordagem inicial

Um estudante habituado apenas à geometria analítica cartesiana tentaria posicionar o vértice na origem $(0,0)$ e a bissetriz no eixo x. Ele buscaria os centros $(x_{n,}, 0)$ e resolveria sistemas de equações quadráticas baseados na distância entre centros:

$$(x_n - x_{n+1})^2 = \quad (r_n + r_{n+1})^2 \qquad (1)$$

Juntamente com a relação trigonométrica $r_n = x_n \sin(\theta)$. Embora correto, esse caminho gera manipulações algébricas densas que obscurecem a "alma" geométrica do problema, tornando a solução visualmente "feia" e propensa a erros de cálculo.

4.1.2 A solução elegante

A beleza emerge ao observarmos a autossemelhança da figura. Podemos resolver o problema focando na relação de homotetia.

4.1.2.1 A Razão de Homotetia (q)

Considere três pontos alinhados na bissetriz: o vértice V, o centro O_n de C_n e o centro O_{n+1} de C_{n+1}. Pela geometria do triângulo retângulo formado pelo centro, o ponto de tangência e o vértice, temos:

$$\sin(\theta) = \frac{r_n}{d_n} \tag{2}$$

Onde d_n é a distância do vértice ao centro O_n.

A distância entre os centros é a soma dos raios:

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1} \tag{3}$$

Substituindo $d_n = \frac{r_n}{\sin(\theta)}$ e $d_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{\sin(\theta)}$ em (3), temos:

$$\frac{r_n}{\sin(\theta)} - \frac{r_{n+1}}{\sin(\theta)} = r_n + r_{n+1} \tag{4}$$

$$r_n - r_{n+1} = (r_n + r_{n+1})\sin(\theta) \tag{5}$$

Reordenando para isolar a razão $q = \frac{r_{n+1}}{r_n}$, obtemos:

$$r_{n+1}(1 + \sin(\theta)) = r_n\,(1 - \sin(\theta)) \tag{6}$$

$$q = \frac{1 - \sin(\theta)}{1 + \sin(\theta)} \tag{7}$$

Concluímos assim, que a razão q é puramente trigonométrica e constante. Isso prova que os raios formam uma Progressão Geométrica (P.G.).

ISSN: 2177-3246

4.2 O CÁLCULO DA ÁREA TOTAL

Como os raios formam uma P.G. de razão q, as áreas $A_n = \pi R_n^2$ formam uma P.G. de razão q^2. Dado que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos $0 < sin(\theta) < 1$, logo $0 < q < 1$, garantindo a convergência da série. A área total S da cadeia infinita é a soma:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 = \pi r_1^2 + \pi(r_1 q)^2 + \pi(r_1 q^2)^2 + \cdots \qquad (8)$$

$$S = \pi r_1^2(1 + q^2 + q^4 + \cdots) = \pi r_1^2\left(\frac{1}{1-q^2}\right) \qquad (9)$$

Substituindo $q = \frac{1-\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}$ (onde $k = \sin(\theta)$, temos:

$$1 - q^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{(1+k)^2 - (1-k)^2}{(1+k)^2} = \frac{4k}{(1+k)^2} \qquad (10)$$

Logo, a solução final simplificada expressa a área total apenas em termos do raio inicial e do ângulo:

$$S = \frac{\pi r_1^2(1+\sin(\theta))^2}{4\sin(\theta)} \qquad (11)$$

4.3 ANÁLISE DE COMPORTAMENTO E O PARADOXO DO INFINITO

A partir do resultado da Área S da equação (11), podemos analisar o seu comportamento em seus limites extremos. Essa análise revela como a nossa intuição geométrica pode falhar ao lidar com o infinito.

Se imaginarmos o ângulo de abertura se aproximando de π $\left(\text{ou seja}, \theta \to \frac{\pi}{2}\right)$, as "paredes" do nosso ângulo se tornam quase retas horizontais paralelas. Matematicamente, $\sin\theta = 1$. Substituindo na fórmula, a área total S tende exatamente a $2r_1$. Isso faz todo o sentido geométrico: com paredes planas tangenciando o primeiro círculo, não há espaço oblíquo para um segundo círculo existir, a razão q tende a zero e a cadeia de círculos "morre" no primeiro elemento.

Por outro lado, o que acontece se o ângulo se torna extremamente agudo, como a ponta de uma agulha infinitesimal ($\theta \to 0°$)? Nesse caso, $\sin\theta = 0$. Como temos $\sin\theta$ no denominador da nossa fórmula, o valor de S explode para o infinito ($S \to \infty$). Se mantivermos o raio r_1 fixo, o vértice do ângulo será "empurrado" infinitamente para longe. A razão q entre os raios se aproximará de 1, significando que os círculos diminuirão de tamanho de forma incrivelmente lenta, e a soma de suas áreas divergirá.

E o que ocorre com qualquer ângulo agudo fixo $\left(\text{por exemplo}, \theta = \frac{\pi}{6}\right)$? Temos, literalmente, uma quantidade infinita de círculos sendo desenhados um após o outro. Para um leigo, a soma de infinitas áreas positivas deveria resultar, obrigatoriamente, em uma área infinita. Contudo, nossa solução prova que a soma é perfeitamente finita e exata. Esse choque cognitivo, ou seja, o infinito cabendo dentro do finito, é um dos conceitos mais belos da matemática.

A interpretação do resultado (7) à luz da literatura de Hardy (1940) confirma a hipótese de "economia de argumentos". A transição de uma soma infinita para uma expressão trigonométrica finita ilustra o poder da modelagem matemática na simplificação de fenômenos aparentemente fractais.

A natureza autossimilar da cadeia de círculos permite uma discussão aprofundada sobre o conceito de fractais no ensino superior. Conforme observado por Bairral (2019), o reconhecimento de padrões que se repetem em diferentes escalas é uma competência essencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico avançado. No problema em tela, a invariância da razão q (equação 7) funciona como um gerador fractal que mantém a proporção entre os termos da série, transformando a figura em um objeto de estudo que une a rigidez da geometria euclidiana à fluidez dos objetos fractais contemporâneos. Essa perspectiva reforça o argumento de Santos e Heidemann (2017) sobre a estética matemática, onde a beleza é percebida na ordem intrínseca que rege o crescimento infinito das formas.

Além disso, a transição entre a intuição visual e a prova formal é fortalecida quando mediada por ambientes de geometria dinâmica. De acordo com Healy (2015), a manipulação de parâmetros em tempo real permite que o estudante realize "investigações matemáticas", tal como proposto por Ponte (2014), validando a convergência da série de forma empírica antes da sua dedução algébrica. Ao observar que, independentemente da escala, a relação de tangência permanece inalterada, o pesquisador consolida o entendimento sobre a continuidade e o limite, superando a fragmentação do conhecimento criticada por Simmons (2016). Assim, a "prova elegante" deixa de ser apenas um constructo teórico de Aigner e Ziegler (2018) para se tornar uma realidade cognitiva tangível e replicável.

Comparando com os achados de Fukagawa e Rothman (2008), observa-se que, enquanto os problemas de Sangaku focavam na relação entre raios, este estudo expande a discussão para a convergência de áreas, oferecendo uma base sólida para a prática docente. A divergência observada em problemas similares que utilizam coordenadas cartesianas reside na carga algébrica; aqui, a geometria sintética permitiu uma "prova elegante" (Aigner; Ziegler, 2018), reduzindo o erro cognitivo e destacando a harmonia da forma.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho propôs-se a investigar a "Cadeia de Círculos em Ângulo Agudo", utilizando-a como um objeto de estudo para demonstrar a convergência entre a geometria sintética e a análise de séries infinitas. Ao longo do desenvolvimento, foi possível desvelar a harmonia intrínseca do problema, transformando uma configuração visual de complexidade fractal em um modelo matemático de notável simplicidade.

Os objetivos específicos foram integralmente alcançados. Primeiramente, a demonstração analítica estabeleceu que a razão de semelhança entre os círculos é uma função exclusiva do seno da metade do ângulo de abertura, consolidando uma lei de formação rigorosa. Em segundo lugar, a modelagem da área total como uma série geométrica provou que, apesar da natureza infinita da sucessão, a ocupação espacial é finita e previsível, dependente apenas do raio inicial r_1 e do ângulo θ. Por fim, a avaliação da "economia do argumento" confirmou que a abordagem sintética oferece uma clareza pedagógica superior às manipulações algébricas exaustivas da geometria analítica cartesiana.

Ademais, a integração de perspectivas históricas, como os Sangakus, com ferramentas tecnológicas contemporâneas de geometria dinâmica, reafirma a perenidade dos desafios geométricos como motores da inovação educativa. Ao transpor a barreira entre o raciocínio empírico-visual e a formalização algorítmica, este estudo demonstrou que a investigação matemática, quando mediada pela busca da elegância, é capaz de mitigar a fragmentação do conhecimento entre a educação básica e a superior. Portanto, a "Trombeta de Círculos" não se encerra em si mesma como uma curiosidade teórica, mas projeta-se como um modelo replicável de investigação que valoriza a visualização matemática e o rigor analítico como competências indissociáveis na formação de um pensamento científico crítico e atualizado.

As contribuições deste estudo estendem-se para além da resolução de um problema de geometria clássica. O artigo oferece aos professores e estudantes um recurso didático que exemplifica a "prova elegante", incentivando a busca pela estética e pela precisão na investigação matemática. Como conclusão fundamental, reitera-se que a beleza na matemática, conforme preconizado por Hardy, não é um atributo subjetivo, mas a manifestação da inevitabilidade lógica e da eficiência estrutural de um argumento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal do Pará – Campus Abaetetuba pelo apoio institucional e pelo financiamento dos custos de publicação deste artigo em periódico qualis. O incentivo da instituição foi fundamental para a concretização desta pesquisa e para a difusão dos resultados junto à comunidade acadêmica. Reconheço, ainda, a contribuição dos colegas e estudantes que, direta ou indiretamente,

colaboraram para o desenvolvimento das ideias aqui apresentadas, fortalecendo o compromisso coletivo com a excelência na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. Proofs from THE BOOK. 6. ed. Berlin: Springer, 2018.

ARCAVI, A. The role of visualization in the learning and teaching of mathematics. Educational Studies in Mathematics, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.

BAIRRAL, M. A. Práticas de Geometria com Tecnologias Digitais. Rio de Janeiro: Edur, 2019.

FUKAGAWA, H.; ROTHMAN, T. Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry. Princeton: Princeton University Press, 2008.

HARDY, G. H. A Mathematician's Apology. Cambridge: Cambridge University Press, 1940.

HEALY, L. Geometria e tecnologias digitais: reflexões sobre o aprendizado e o ensino. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 10, n. 1, 2015.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. História na educação matemática: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PIRES, A. C. Diretrizes para Redação Científica. São Paulo: Editora Acadêmica, 2010.

PONTE, J. P. Investigação Matemática na sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SÁ, I. P. de. Arquimedes de Siracusa e o seu Método da Exaustão: uma Atividade Didática para o Cálculo de π. Universidade de Vassouras, 2011. Disponível em: https://www.periodicos.capes.gov.br/index.php/acervo/buscador.html?task=detalhes&source=all&id=W4240316652&utm_source=copilot.com. Acesso em: 19 mar. 2026.

SANTOS, J. P.; HEIDEMANN, L. A. A Estética e a Elegância no Ensino de Ciências e Matemática. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 10, n. 2, 2017.

SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. v. 2. São Paulo: McGraw-Hill, 2016.